مبرهنة:

المرشحة f_G المولدة بالمجموعة الجزئية غير الخالية G هي مجموعة العناصر x من E التي تحقق الخاصة: يوجد عدد منتهٍ من عناصر G $a_1, a_2, \dots, a_n$ بحيث يكون:

$$x \geq a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n$$

البرهان:

لتكن f'_G مجموعة العناصر x من E التي تحقق الخاصة: يوجد عدد منتهٍ من عناصر G $a_1, a_2, \dots, a_n$ بحيث يكون $x \geq a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n$.

- إذا كان $x \in f'_G$ و $y \geq x$ ⇐ يوجد عدد منتهٍ من عناصر G $a_1, a_2, \dots, a_n$ بحيث يكون $x \geq a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n$ و $y \geq x$ ⇐ $y \geq a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n$ ⇐ $y \in f'_G$

- إذا كان $x, y \in f'_G$ ⇐ يوجد $a_1, a_2, \dots, a_n \in G$ و $b_1, b_2, \dots, b_m$ بحيث يكون $x \geq a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n$ و $y \geq b_1 \wedge b_2 \wedge \dots \wedge b_m$ ⇐

$$x \wedge y \geq a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n \wedge b_1 \wedge b_2 \wedge \dots \wedge b_m$$

⇐ $x \wedge y \in f'_G$.

- لأن $f'_G \neq \emptyset$ و $\emptyset \neq G \subseteq f'_G$ ومنه نستنتج أن f'_G مرشحة تحوي G

- لتكن f'' مرشحة أخرى تحوي G عندئذٍ:

بفرض أن $x \in f'_G$ ⇐ يوجد عدد منتهٍ من عناصر G $a_1, \dots, a_n$ بحيث يكون:

$x \geq a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n$ ولكن $a_1, a_2, \dots, a_n \in G$ ⇐

$a_1, a_2, \dots, a_n \in f''$ و f'' مرشحة ⇐ تعميم المبرهنة الثانية من المرشحة

$a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n \in f''$ و $x \geq a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n$ و f'' مرشحة ⇐ $x \in f''$

وبالتالي

$f'_G \subseteq f''$ ⇐ f'_G هي أصغر مرشحة تحوي G أي أن $f_G = f'_G$ أي أن

تحقق الخاصة المذكورة سابقاً.

مبرهنة:

المرشحة التي تملك مولدة منتهية تكون مرشحة أساسية كحالة خاصة في تخيف الشبكة الدنيا المنتهية جميع المرشحات أساسية

البرهان

لتكن F_G المرشحة المولدة بالمجموعة المنتهية G.

- $G = \phi$ عندئذ يكون $F_G = \{1\} = F_1$ (التافهة)

- $G \neq \phi$ ولتكن $G = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ لنفرض أن $a = a_1 \wedge a_2 \wedge ... \wedge a_n$ عندئذ يكون $F_a = F_G$

ولنفرض أن $x \in F_G \Leftarrow$ يوجد عدد منته من عناصر G وليكن $a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_k}$ حيث $(k \leq n)$ بحيث يكون $x \geq a_{i_1} \wedge a_{i_2} \wedge ... \wedge a_{i_k}$ أي:

$$x \geq a_{i_1} \wedge a_{i_2} \wedge ... \wedge a_{i_k} \geq a_1 \wedge a_2 \wedge ... \wedge a_n = a$$

أي أن $x \geq a$ وبالتالي $x \in F_a$ ومنه

$$F_G \subseteq F_a$$

بفرض أن $x \in F_a \Leftarrow x \geq a$ لكن $a \in F_G \Leftarrow x \in F_G$ ومنه $F_a \subseteq F_G$

من الاحتوائين ينتج المساواة أي أن F_G أساسية

ملاحظة:

بعض المجموعات الجزئية G يمكن أن تولد مرشحة غير فعلية ونقول عن G في هذه الحالة بأنها مجموعة $\wedge$ - غير متوافقة ($\wedge$-incompatible) وحسب ما رأينا سابقاً فهذا يعني أنه يوجد عدد منته من عناصر G مثل $a_1, a_2, ..., a_n$ بحيث يكون:

$$a_1 \wedge a_2 \wedge ... \wedge a_n = 0$$

نقول عن المجموعة الجزئية G التي تولد مرشحة فعلية $\wedge$ - متوافقة ($\wedge$-compatible)

وجود المرشحات:

سنفترض أن تخيف الشبكة الدنيا مع تملك على الأقل عنصرين ~~[illegible]~~ وهذا سيسمح بوجود مرشحات فعلية

مبرهنة:
مجموعة المرشحات الفعلية المرتبة بعلاقة الاحتواء تكون شبه استقرائية

البرهان:
لتكن $\{f_i\}_{i\in I}$ أسرة غير خالية من المرشحات الفعلية مرتبة كلياً ، ولنفرض أن $f=\bigcup_{i\in I} f_i$
فإن f تكون مرشحة فعلية وذلك لأن
- $f\neq\phi$
- نفرض أن $x\in f$ و $y\geq x$ ⟸ يوجد $i\in I$ بحيث يكون $x\in f_i$ و $y\geq x$
ولكن f_i مرشحة فعلية ⟸ $y\in f_i$ ⟸ $y\in f=\bigcup_{i\in I} f_i$

- نفرض أن $x,y\in f$ ⟸ يوجد $i,j\in I$ بحيث يكون $x\in f_i$ و $y\in f_j$ ، وبما أن
f_i و f_j متقارنين من بين العناصر ($f_i\subseteq f_j$ أو $f_j\subseteq f_i$) ولنكن مثلاً $f_i\subseteq f_j$)
⟸ $x,y\in f_j$ و f_j مرشحة ⟸ $x\wedge y\in f_j$ ⟸
$x\wedge y\in f=\bigcup_{i\in I} f_i$

- بما أن كل من f_i لا تحوي العنصر 0 فإن $0\notin f=\bigcup_{i\in I} f_i$ ومنه نستنتج أن f مرشحة فعلية
إن $f=\bigcup_{i\in I} f_i$ هي عبارة عن حد أعلى لأجزاء الأسرة المرتبة كلياً (وبالأحرى حد أعلى)
ومنه نستنتج أن مجموعة المرشحات الفعلية المرتبة بعلاقة الاحتواء تكون شبه
استقرائية .

باستخدام نظرية Zorn نستنتج المبرهنة التالية :
مبرهنة:
توجد مرشحات فعلية عظمى من أجل الاحتواء ونسميها بفوق المرشحات وكل مرشحة
فعلية تكون محتواة في فوق مرشحة

مبرهنة
لتكن f مرشحة فعلية فإن القضيتين التاليتين متكافئتان
1) f فوق مرشحة
2) من أجل أي عنصر $x\notin f$ توجد $y\in f$ بحيث يكون $x\wedge y=$

البرهان

$1 \Leftarrow 2$: لتكن f مرشحة ولنفرض جدلاً أنه توجد $x \notin f$ بحيث يكون من أجل أي $y \in f$
$x \wedge y \neq 0$ ولنفرض أن $G = f \cup \{x\}$ فإن G تكون $\wedge$ - متقاطعة وذلك
لأن:

لتكن $a_1, a_2, \dots, a_n$ عناصر G ولنفرض أن $a = a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n$

- إذا كانت جميع a_i تنتمي إلى f فإن $a \in f$ لأن f مرشحة وبالتالي فإن $a \neq 0$
- إذا كانت مثلاً $a_1 = x$ فإن $a = x \wedge y$ حيث $y = a_2 \wedge \dots \wedge a_n$ و $y \in f$

ومنه ينتج أن $a = x \wedge y \neq 0$ (حسب الفرض الجدلي)

وبالتالي جميع الأعداد $a \neq 0$ ومنه فإن G تولد مرشحة فعلية f_G أي أن
$f \subsetneq G \subseteq f_G$ وهذا يناقض أعظمية f وبالتالي فالفرض الجدلي خاطئ
أي أن (2) محققة

$2 \Leftarrow 1$

إذا كانت عكسه ولنفرض أنه توجد مرشحة فعلية f' بحيث يكون $f \subsetneq f'$ ولكن
$x \in f'$ و $x \notin f$ $\Leftarrow$ (حسب الفرض) يوجد $y \in f$ بحيث يكون
$x \wedge y = 0$ لكن:
$y \in f \subsetneq f' \Leftarrow y \in f'$ و $x \in f'$ $0 = x \wedge y \in f'$ وهذا يناقض أنه
لا توجد مرشحة فعلية أكبر تماماً من f وبالتالي فإن f عظمى مرشحة

انتهت المحاضرة